**ΑΠΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Τελική ημερομηνία παράδοσης:** **28/06/24**

**Email για παράδοση εργασιών:** [ergasiesuowm@gmail.com](mailto:ergasiesuowm@gmail.com) ή στο eclass του μαθήματος

**32.1. Δεδομένα Εισόδου**

Για να διασφαλιστεί ότι κάθε φοιτητής θα κάνει τη δική του εργασία, η κάθε εργασία θα στηρίζεται στον πενταψήφιο κωδικό που έχει ο κάθε φοιτητής.

Ο φοιτητής θα πρέπει να ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα προκειμένου να δημιουργήσει τις κατάλληλες συναρτήσεις προς ανάλυση. Συγκεκριμένα:

Χρησιμοποιώντας τον 5ψηφιο κωδικό σας, θα δημιουργήσετε 5 παρενθέσεις με τον εξής τρόπο: σε κάθε παρένθεση θα αφαιρείτε από το ένα ψηφίο του κωδικού σας. Για παράδειγμα αν ο κωδικός σας είναι θα δημιουργηθούν οι εξής παρενθέσεις:

* Συνάρτηση

Για να δημιουργηθεί η πρώτη συνάρτηση θα πάρουμε το γινόμενο των δυο πρώτων παρενθέσεων και έπειτα θα προσθέσουμε το λογάριθμο (νεπέριο) της τρίτης παρένθεσης. Δηλαδή,

* Συνάρτηση

Για να δημιουργηθεί η δεύτερη συνάρτηση, θα κατασκευάσουμε ένα κλάσμα. Αριθμητής θα είναι το τετράγωνο της τέταρτης παρένθεσης και παρονομαστής θα είναι η πέμπτη παρένθεση. Δηλαδή,

* Συνάρτηση

Για να δημιουργηθεί η τρίτη συνάρτηση, θα κατασκευάσουμε ένα κλάσμα. Αριθμητής θα είναι η ρίζα της πρώτης παρένθεσης και παρονομαστής η δεύτερη παρένθεση. Δηλαδή,

**Γ.2. Επιθυμητή Επεξεργασία**

1. Να βρεθούν, όπου είναι δυνατόν, τα όρια των συναρτήσεων και στα ψηφία του κωδικού. Για παράδειγμα εάν ο κωδικός είναι 2051, τότε θα πρέπει να βρεθούν τα όρια των συναρτήσεων στα σημεία, 2, 0, 5 και 1.
2. Να εξετάσετε τις συναρτήσεις και ως προς τη συνέχεια.
3. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων και .
4. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, κυρτότητα και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων και .
5. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των συναρτήσεων και .

**Γ.3. Παραδοτέα**

Ο φοτητής πρέπει να παραδώσει τις λύσεις – απαντήσεις σε έγγραφο του Word.

**Παράδειγμα Εργασίας**

**Έστω ότι ο φοιτητής έχει τον κωδικό**

Για να δημιουργήσουμε τις συναρτήσεις θα χρειαστούμε τις παρακάτω παρενθέσεις:

* **Συνάρτηση**

Θα πολλαπλασιάσουμε τις δυο πρώτες παρενθέσεις και θα προσθέσουμε τον λογάριθμο της τρίτης παρένθεσης. Δηλαδή,

* **Συνάρτηση**

Θα δημιουργήσουμε ένα κλάσμα, αριθμητής θα είναι η τέταρτη παρένθεση στο τετράγωνο και παρονομαστής η πέμπτη παρένθεση. Δηλαδή,

* **Συνάρτηση**

Θα δημιουργήσουμε ένα κλάσμα, αριθμητής θα είναι η ρίζα της πρώτης παρένθεσης και παρονομαστής η δεύτερη παρένθεση. Δηλαδή,

Ξεκινάμε να απαντάμε στα ερωτήματα που μας ζητήθηκαν:

**Ερώτημα 1ο: Να βρεθούν τα όρια των συναρτήσεων όταν το τείνει στους αριθμούς του κωδικού**

Αρχικά, θα πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της κάθε συνάρτησης.

* **Συνάρτηση**

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, κοιτάζουμε αν η συνάρτηση έχει κλάσμα, ρίζα ή λογάριθμο.

Η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει λογάριθμο, άρα ο περιορισμός που πρέπει να πάρουμε είναι αυτό που βρίσκεται μέσα στο λογάριθμο να είναι θετικό. Δηλαδή:

⬄

Άρα, το πεδίο ορισμού είναι

* **Συνάρτηση**

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, κοιτάζουμε αν η συνάρτηση έχει κλάσμα, ρίζα ή λογάριθμο.

Η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει κλάσμα, άρα ο περιορισμός που πρέπει να πάρουμε είναι ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός. Δηλαδή,

⬄

Άρα, το πεδίο ορισμού είναι ή αλλιώς

* **Συνάρτηση**

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, κοιτάζουμε αν η συνάρτηση έχει κλάσμα, ρίζα ή λογάριθμο.

Η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει ρίζα και κλάσμα, άρα ο περιορισμός που πρέπει να πάρουμε είναι αυτό που είναι μέσα στη ρίζα να είναι μεγαλύτερη ή ίσο με το μηδέν και ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός. Δηλαδή,

⬄

και

⬄

Θα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα και οι δυο περιορισμοί, δηλαδή θέλουμε όλες εκείνες τις τιμές που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του και δεν είναι η τιμή .

Άρα, το πεδίο ορισμού είναι ή αλλιώς

Τώρα που βρήκαμε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων, θα υπολογίσουμε τα όρια που μας ζητήθηκαν.

* Έχουμε υπ’ όψιν ότι ένα όριο για να έχει νόημα (να ορίζεται) θα πρέπει ο αριθμός που τείνει το :
* να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συγκεκριμένης συνάρτησης ή
* να είναι άκρο του πεδίου ορισμού.

**Όταν**

* Το δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και δεν είναι άκρο του πεδίου ορισμού, άρα δεν ορίζεται το όριο της στο . Δηλαδή,

, άρα

* Το ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει :
* Το ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:

**Όταν**

* Το ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:
* Το ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:
* Το δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , αλλά αποτελεί άκρο του πεδίου ορισμού της , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:

Επειδή το πεδίο ορισμού είναι ένωση διαστημάτων, για να υπάρχει το όριο θα πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και να είναι ίδια, δηλαδή να ισχύει:

Τα πλευρικά όρια βγήκαν διαφορετικά, άρα δεν υπάρχει το όριο. Δηλαδή,

, άρα

**Όταν**

* Το δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , αλλά αποτελεί άκρο του πεδίου ορισμού της , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:

Δεν πήραμε και τα δυο πλευρικά όρια, επειδή το πεδίο ορισμού είναι ένα διάστημα και όχι ένωση δυο διαστημάτων.

* Το ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:
* Το ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:

**Όταν**

* Το ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:
* Το ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:
* Το ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:

**Όταν**

* Το δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και δεν είναι άκρο του πεδίου ορισμού, άρα δεν ορίζεται το όριο της στο . Δηλαδή,

, άρα

* Το δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης , αλλά αποτελεί άκρο του πεδίου ορισμού της , άρα το όριο ορίζεται, θα δούμε τώρα αν υπάρχει:

Επειδή το πεδίο ορισμού είναι ένωση διαστημάτων, για να υπάρχει το όριο θα πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και να είναι ίδια, δηλαδή να ισχύει:

Τα πλευρικά όρια βγήκαν διαφορετικά, άρα δεν υπάρχει το όριο. Δηλαδή,

, άρα

* Το δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και δεν είναι άκρο του πεδίου ορισμού, άρα δεν ορίζεται το όριο της στο . Δηλαδή,

, άρα

**Ερώτημα 2ο: Να βρεθούν μελετηθούν ως προς την συνέχεια οι συναρτήσεις**

Η είναι συνεχής στο Αf ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

* Γινόμενο είναι οι δυο παρενθέσεις που είναι πολυώνυμα και είναι εξ’ ορισμού συνεχείς και μετά ο λογάριθμος που είναι ,επίσης, εξ’ ορισμού συνεχής συνάρτηση.

Η είναι συνεχής στο Ag ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

* Πηλίκο είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής που είναι πολυώνυμα και είναι εξ’ ορισμού συνεχείς συναρτήσεις.

Στη τιμή , που δεν ορίζεται η συνάρτηση, είναι ασυνεχής.

Η είναι συνεχής στο Ah ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Στη τιμή , που δεν ορίζεται η συνάρτηση είναι ασυνεχής.

**Ερώτημα 3ο: Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων**

**Ερώτημα 4ο: Να βρεθεί η μονοτονία, τα ακρότατα, η κυρτότητα και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων**

* **Μονοτονία και ακρότατα της**

Για να βρούμε την μονοτονία και τα ακρότατα θα πρέπει να μηδενίσουμε την πρώτη παράγωγο και έπειτα να κάνουμε τον πίνακα προσήμων.

* ⬄ ⬄ ⬄

Διακρίνουσα αρνητική σημαίνει ότι δεν έχει ρίζες, με αποτέλεσμα να διατηρεί σταθερό πρόσημο και συγκεκριμένα το πρόσημο του α, δηλαδή το τριώνυμο )είναι παντού θετικό.

* *Πίνακας πρόσημων*

***Μονοτονία****:*

Η είναι γνησίως αύξουσα στο

***Ακρότατα:***

Η δεν έχει ακρότατα

* **Κυρτότητα και σημεία καμπής της**

Για να βρούμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής θα πρέπει να μηδενίσουμε την δεύτερη παράγωγο και να κάνουμε πίνακα πρόσημων.

* ⬄ ⬄ ⬄

* Πίνακας πρόσημων

***Κυρτότητα:***

Η είναι κυρτή στο

***Σημεία καμπής***

Δεν έχει σημεία καμπής η

* Μπορεί η συνάρτηση να ορίζεται από το και μετά, αλλά στον πίνακα πρόσημων πρέπει να βάλουμε αρχικά όλες τις τιμές προκειμένου να μπορέσουμε να βρούμε τα πρόσημα.
* **Μονοτονία και ακρότατα της**

Για να βρούμε την μονοτονία και τα ακρότατα θα πρέπει να μηδενίσουμε την πρώτη παράγωγο και να κάνουμε πίνακα πρόσημων.

* ⬄ ⬄ ⬄

* Πίνακας πρόσημων

***Μονοτονία:***

* Η είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα
* Η είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα

***Ακρότατα:***

* Στη θέση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το
* Στη θέση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το
* Μπορεί να φαίνεται περίεργο, το μέγιστο να είναι και το ελάχιστο , αλλά γι’ αυτό είναι τοπικά και όχι ολικά μέγιστα και ελάχιστα. Τοπικά σημαίνει για εκείνη την περιοχή αποτελεί μέγιστο ή ελάχιστο. Αυτό συνέβη διότι, όπως είδαμε και στα όρια, το όριο της δεν υπάρχει. Το αριστερό πλευρικό όριο έβγαινε και το δεξιό πλευρικό όριο .
* **Κυρτότητα και σημεία καμπής της**

Για να βρούμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής θα πρέπει να μηδενίσουμε την δεύτερη παράγωγο και να κάνουμε πίνακα πρόσημων.

* ⬄ ⬄ ⬄
* Πίνακας πρόσημων

***Κυρτότητα***

* Η είναι κοίλη στο διάστημα
* Η είναι κυρτή στο διάστημα

***Σημεία καμπής***

Δεν έχει σημεία καμπής, καθώς μπορεί να αλλάζει η κυρτότητα, αλλά η τιμή δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού.

* **Μονοτονία και ακρότατα της**

Για να βρούμε την μονοτονία και τα ακρότατα θα πρέπει να μηδενίσουμε την πρώτη παράγωγο και να κάνουμε πίνακα πρόσημων.

* ⬄ ⬄ ⬄
* Πίνακας πρόσημων

* **Κυρτότητα και σημεία καμπής της**

Για να βρούμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής θα πρέπει να μηδενίσουμε την δεύτερη παράγωγο και να κάνουμε πίνακα πρόσημων:

* ⬄ ⬄ ⬄

* Πίνακας πρόσημων

***κυρτότητα***

* Είναι κυρτή στα διαστήματα
* Είναι κοίλη στα διαστήματα

**Σημεία καμπής**

* Στη θέση έχουμε σημείο καμπής το
* Στη θέση έχουμε σημείο καμπής το

**Ερώτημα 5ο: Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των συναρτήσεων**

***Κατακόρυφη ασύμπτωτη***

Κοιτάζουμε τα ‘προβληματικά σημεία’ της , για να δούμε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

* Προβληματικά θεωρούμε τα σημεία, τα οποία δημιουργούν πρόβλημα στην , είτε διότι της μηδενίζουν τον παρονομαστή (αν περιέχει κλάσμα), είτε της μηδενίζουν τον λογάριθμο (αν περιέχει λογάριθμο).

Το σημείο που θα ελέγξουμε αν η έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι για .

Άρα, η έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη

***Οριζόντια ασύμπτωτη***

Η οριζόντια ασύμπτωτη είναι της μορφής . Για να την βρούμε θα πρέπει να βρούμε τις τιμές των .

Άρα, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη. Στο δεν ελέγχουμε καν για ασύμπτωτη, καθώς το πεδίο ορισμού της είναι .

***Κατακόρυφη ασύμπτωτη***

Το σημείο που θα ελέγξουμε αν η έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι για .

Άρα, η έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη

***Πλάγια ασύμπτωτη***

Η οριζόντια ασύμπτωτη είναι της μορφής . Για να την βρούμε θα πρέπει να βρούμε τις τιμές των .

Άρα, η έχει πλάγια ασύμπτωτη στο την ευθεία . Ομοίως, και στο έχει την ίδια πλάγια ασύμπτωτη.

***Κατακόρυφη ασύμπτωτη***

Το σημείο που θα ελέγξουμε αν η έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι για .

Άρα, η έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη

***Πλάγια ασύμπτωτη***

Η οριζόντια ασύμπτωτη είναι της μορφής . Για να την βρούμε θα πρέπει να βρούμε τις τιμές των .

α’ τρόπος

β’ τρόπος

Άρα, η έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο την ευθεία . Ομοίως, και στο έχει την ίδια οριζόντια ασύμπτωτη.